

スリット空中線の饋電インピーダンス

虫明 康人 (東北大学工学部)

§ I 電流磁流と電界磁界の双対性

一定数 μ, ϵ なる空間に電氣的及び磁氣的完全導体がある時、それ等の表面を S_1, S_2, \dots 及 S'_1, S'_2, \dots なる曲面とし、今考へている空間から除外すると、残りの空間に於ては次の如く、Maxwell の電磁方程式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times E + j\omega\mu H &= -J' & \nabla \cdot H &= \frac{\rho'}{\mu} \\ \nabla \times H - j\omega\epsilon E &= J & \nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

但し、 J, J', ρ, ρ' は夫々電流、磁流、電荷、磁荷を表はし、これ等は連続條件

$$\nabla \cdot J = -j\omega\rho, \quad \nabla \cdot J' = -j\omega\rho' \quad (2)$$

を満足す。又境界面上では、 n を単位法線とすると、

$$\left. \begin{aligned} E \times n &= 0, & H \cdot n &= 0 & (S_1, S_2, \dots \text{上}) \\ H \times n &= 0, & E \cdot n &= 0 & (S'_1, S'_2, \dots \text{上}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

なる境界条件を満足しなければならぬ。

$$\text{そこで今、} \quad \left. \begin{aligned} J &= N, & J' &= M \\ \rho &= n, & \rho' &= m \end{aligned} \right\} \quad \text{但し} \quad \left. \begin{aligned} \nabla \cdot N &= -j\omega n \\ \nabla \cdot M &= -j\omega m \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

なる電磁流界が与へられた時の界を

$$E = F, \quad H = G \quad (5)$$

とすれば(1)より、

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times F + j\omega\mu G &= -M \\ \nabla \times G - j\omega\epsilon F &= N \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

で且

$$\left. \begin{aligned} F \times n &= G \cdot n = 0 & (S_1, S_2, \dots \text{上}) \\ G \times n &= F \cdot n = 0 & (S'_1, S'_2, \dots \text{上}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(6)式を變形し、上下の式を交換して書く

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times (-\gamma G) + j\omega\mu(\gamma' F) &= -(\gamma' N) \\ \nabla \times (\gamma' F) - j\omega\epsilon(\gamma G) &= (-\gamma' M) \end{aligned} \right\} \quad (\text{但し } \gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}) \quad (8)$$

その他の式と同様な變形を行ひ、(1), (2), (3)式と比較すると、電磁流源が

$$\left. \begin{aligned} J &= -\gamma' M, & J' &= \gamma N \\ \rho &= -\gamma' m, & \rho' &= \gamma n \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

と与へられ、且境界条件として丁度磁氣的完全導体とを交換した場合の界が

$$E = -\gamma G, \quad H = \gamma' F \quad (10)$$

であることが解る。

§ II 板と孔との双対性

$x=0$ の平面上の一部 S に電氣的完全導体があり、残部 \bar{S} には何もない場合、

$$\left. \begin{aligned} J(x) &= N(x) & x > 0 \\ J(x) &= N(-x) & x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

なる電流分布があるとする。此の時の界を

$$\left. \begin{aligned} E(x) &= F(x) & x > 0 \\ H(x) &= G(x) & x > 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} E(x) &= F'(x) & x < 0 \\ H(x) &= G'(x) & x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

とするとこの界は電氣的に、対称 (E-対称) であるから、

$$\left. \begin{aligned} -E_x(-x) &= E_x'(x) \\ F_y(-x) &= F_y'(x) \\ F_z(-x) &= F_z(x) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} G_x(-x) &= G_x'(x) \\ -G_y(-x) &= G_y'(x) \\ -G_z(-x) &= G_z'(x) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

よつて \bar{S} では丁度磁氣的完全導体板の條件を満足しているから、それを挿入して對稱に変化はなし。それ以上空間は独立の部分に分けられる。そこで今 S, \bar{S} の部分の電氣的及び磁氣的完全導体板を取換へ、電流分布も次の様な磁流分布に変へる。

$$J(x) = \gamma' N(x) \quad (x > 0), \quad J(x) = -\gamma N(-x) \quad (x < 0) \quad (14)$$

§ II の結果より此の時の界は

$$\left. \begin{aligned} E(x) &= -\gamma G(x) & (x > 0) \\ H(x) &= \gamma' F(x) & (x > 0) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} E(x) &= \gamma G'(x) & (x < 0) \\ H(x) &= -\gamma' F'(x) & (x < 0) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(13)から此の界もE対称であるから、 S の部分の磁氣的完全導体を取除いて界は同じである。結局対稱電流分布に対する電氣的完全導体の問題は、反対称磁流に対する孔の問題に帰着し、(12)及(15)式の關係がある。

§ III Slitの饋電インピーダンス

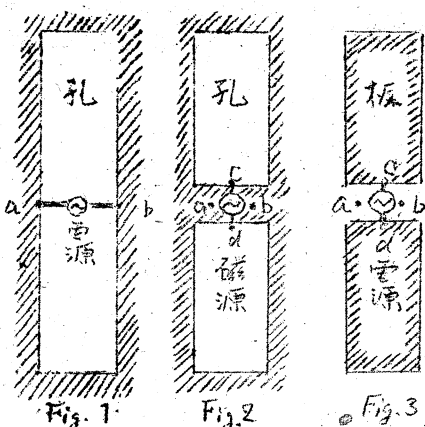


Fig. 1の如きスリットを電源に結合したものは、Fig. 2の如き磁源が与へられた物と考へることが出来る。次にこれと双対の板空中線 (Fig. 3) を考へ、この板の cd から見た饋電インピーダンス Z' 、饋電電流、電圧を夫々 I', V' とすると、対称電流であるから、(12)式により、

$$\begin{aligned} V' &= \int_a^b E \cdot ds = \int_a^b F \cdot ds \\ I' &= \oint_{aba} H \cdot ds = 2 \int_a^b H \cdot x \cdot ds = 2 \int_a^b G \cdot ds \\ \therefore Z' &= \frac{V'}{I'} = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b F \cdot ds}{\int_a^b G \cdot ds} \end{aligned}$$

次に Fig. 2 のスリットの饋電 (電氣的) ab から見た電流、電圧、インピーダンスを夫々 I, V, Z とすると非対称磁流で Fig. 3 と相対であるから、(15)式より、

(26)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= -\gamma \int_a^b Q \cdot dS \\ I &= \oint_{\text{面}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\mu_0} \int_a^b (-\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 2 \frac{1}{\mu_0} \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ Z &= \frac{V}{I} = \frac{\gamma^2 \int_a^b Q \cdot dS}{\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}} \end{aligned}$$

(17)

(16), (17) 式より

$$Z = \frac{\gamma^2 I}{4 Z'} = \frac{(60\pi)^2}{Z'}$$

(18)

従来この式は M.M.F. 法により電流の考へを用いて出されてきたが、こゝに電圧電流の関係から直接出す事が出来た。よつて Fig. 4 の如く無限平面を 2 等分した二板の板の中央から見たインピーダンスは常に $60\pi \Omega$ なる事を解つた。尚一般にスリット空中線系及、それと双対な板空中線系のインピーダンスマトリックスを夫々 $[Z], [Z']$ とすると次の関係がある。

$$[Z] = (60\pi)^2 [Z']^{-1} \quad (19)$$

以上



境界条件を満足する空中線系のインピーダンスに就いて

○虫明 康人, 酒井 和男 (東北大学工学部)

§ I 一般空中線系の基本式

N 箇の任意形の空中線系があるとき、夫々の饋電点から見た電気的特性を求めよう。先づ #1 の空中線に V_1 の電圧を加へ、他の空中線の饋電点を全部開放した場合の解を Maxwell の方程式及び境界条件から求め、#1 に流れる電流を I_1 , #2, #3, ... #N, に誘起する電圧を夫々 $V_{21}, V_{31}, \dots, V_{N1}$ とし、これを解 [1] とする。同様に #S の空中線に V_S の電圧を加へ、他の空中線を全部開放した時の解 [S] を求め、#S の電流を I_S , #r の電圧を V_{rs} とする。このやり方にて N 組の解を求め、任意に線型結合したものを作ると、それは Maxwell の方程式及び境界条件を満足しているから、明らかに解であることがわかる。そこで今 #r に夫々 V_r を加へたとする。その時 N 箇の電流 I_r を取り、

$$V_r = \sum_{s=1}^N V_{rs} I_s \quad (1)$$

なる如く I_s を定める。($|V_{rs}| \neq 0$ なる可能) 次に解 [S] を夫々 I_s 倍して、 N 箇の和を作ると、一つの解が得られる。所がこの解は (1) 式の関係により #r の饋電点電圧が夫々 V_r であるといふ条件を満足している。結局この場合の解が求むことになる。このときの I_r は 仮定により

$$I_r = a_r I_r \quad (2)$$

(1), (2) から a_r を消去すると

$$V_r = \sum_{s=1}^N \frac{V_{rs}}{a_s} I_s$$

然るに V_{rs} と I_s との間には比例的關係があるから、

$$Z_{rs} = \frac{V_{rs}}{I_s} \quad (3)$$

と置くと、

$$V_r = \sum_{s=1}^N Z_{rs} I_s \quad (4)$$

可逆定理から $Z_{rs} = Z_{sr}$ が普通成立する。(4) は送信空中線系の基本式である。

尚空中線系が或境界中にあるとき、全空中線を用意した解を求め、その時各饋電点に誘起する電圧を夫々 V_{or} とすると先に求めた解に更にこの解を加へると余剰な解であるから、和を作ると次式が成立することを知る。

$$V_r = V_{or} + \sum_{s=1}^N Z_{rs} I_s \quad (5)$$

これが受信空中線系の基本式である。

§ II 平行二導体空中線系の相互インピーダンス

二本の空中線間の相互インピーダンス Z_{21} を求めるには、上の結果から #1 のみに V_1 を加へ、#2 の電圧 V_2 と I_2 を計算すればよい。空中線上の長さの座標を夫々 x, y , 全長を l_1, l_2 , 太さを夫々 p_1, p_2 とする。又二本の中心間隔を d とし、M.K.S. 有理單位系で計算を進める。今、 I_r による #S 空中線の土のヘルツベクトルを \mathbf{H}_{rs} とすると、境界条件から、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_{11}(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{21}(x)}{\partial x^2} + k^2 \{ \Phi_{11}(x) + \Phi_{21}(x) \} &= R_1(x) I_1(x) \\ \frac{\partial^2 \Phi_{21}(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{22}(y)}{\partial y^2} + k^2 \{ \Phi_{21}(y) + \Phi_{22}(y) \} &= R_2(y) I_2(y) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

但し、

$$\Phi_{rs} = \frac{1}{4\pi j \omega \epsilon} \int_{l_s} I_s(\xi) \frac{e^{-jk r_{rs}}}{r_{rs}} d\xi \quad (r, s = 1, 2) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} r_{11} &= \sqrt{(x-\xi)^2 + p_1^2}, & r_{21} &= \sqrt{(y-\xi)^2 + d^2}, \\ r_{12} &= \sqrt{(x-\eta)^2 + d^2}, & r_{22} &= \sqrt{(y-\eta)^2 + p_2^2}, \\ k^2 &= \omega^2 \mu \epsilon \end{aligned}$$